ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 8

3.6 Представление дискретных систем

Рассмотрим систему на рисунке 3.3. как дискретную систему, условно изображенную на рисунке 3.8. Здесь $u(k)$ – входная последовательность сигнала, $y(k)$ – выходная последовательность сигнала системы. k – текучий номер такта (аналог текущего времени).

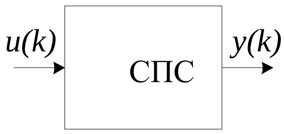

Рисунок 3.8 – Система преобразования сигналов

Поскольку система должна не повторять входные сигналы, а как-то их преобразовывать, то ее выходной $y(k)$ сигнал должен зависеть не только от последнего отчета входного сигнала $u(k)$, но и от прошлых отчетов входного и выходного сигналов. Прошлые отчеты будем обозначать, $u(k-m)$. Здесь $u(k-m)$ – это значение сигнала u, которое было m тактов назад. Например, $u(k-1)$ значение сигнала u на предыдущем такте. Рассмотрим простой пример. Пусть выходной сигнал системы зависит от последнего отчета входного сигнала и от предпоследнего отчета выходного сигнала. Это значит, можно записать следующее уравнение

$$y(k) = b \cdot u(k) + a \cdot y(k-1) \ . \qquad (3.42)$$

Здесь a, b – коэффициенты, k – номер отчета. Примем $b = 1$, $a = 0,5$, тогда

$$y(k) = u(k) + 0,5y(k-1) \ . \qquad (3.43)$$

Уравнения (3.42), (3.43) называются разностными уравнениями. Подадим на вход системы (3.43) единичный ступенчатый сигнал. Составим таблицу 3.1, при этом примем, что $u(0) = 0$, $y(0) = 0$ (для разностных уравнений, так же как и для дифференциальных, нужно задавать начальные условия).

Таблица 3.1 – Реакция системы (3.43) на ступенчатый сигнал

k	Вход	Выход
0	0	0+0=0
1	1	1+0,5·0=1
2	1	1+0,5·1=1,5
3	1	1+0,5·1,5=1,75
4	1	1+0,5·1,75=1,875
5	1	1+0,5·1,875=1,938

Из таблицы видно, что система, описываемая уравнением (3.43) действительно динамическая. В ответ на ступенчатый входной сигнал ее выходной сигнал изменяется плавно, имея асимптотой число два. Теперь изменим коэффициент a, примем его равным 1,5.

$$y(k) = u(k) + 1{,}5y(k-1)\ . \tag{3.44}$$

Подадим на вход системы (3.44) тот же ступенчатый сигнал. Составим таблицу 3.1.

Таблица 3.2 – Реакция системы (3.44) на ступенчатый сигнал

k	Вход $u(k)$	Выход $y(k)$
0	0	0+0=0
1	1	1+1,5·0=1,5
2	1	1,5+1,5·1=3
3	1	1+1,5·3=5,5
4	1	1+1,5·5,5=9,25
5	1	1+1,5·9,25=14,875

Очевидно (таблица 3.2), при постоянном входном сигнале выходной сигнал нашей системы будет неограниченно расти. Мы знаем, что если выходной сигнал системы неограниченно растет при постоянном входном сигнале, то такая система неустойчивая. Таким образом, для дискретных систем, так же, как и для непрерывных, существует проблема устойчивости. Интуитивно ясно, что для устойчивости системы (3.44) нужно, чтобы a было меньше единицы. Однако для более сложной системы не так просто выяснить условия устойчивости. Вопросом устойчивости мы займемся позже.

В общем случае выходной сигнал зависит от нескольких отчетов входного и выходного сигналов. Допустим, что он зависит от m отчетов входного и n выходного сигналов. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} y(k) = &-a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \ldots - a_n y(k-n) + \\ &+ b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \ldots + b_m u(k-m)\ . \end{aligned} \tag{3.45}$$

Минусы перед a_i в (3.45) нам удобно использовать для последующей записи уравнения в удобной форме (см. (3.46)). Уравнение (3.45) является разностным уравнением общего вида. *Разностным называется уравнение, описывающее поведение системы только в дискретные моменты времени*.

Представим (3.45) в более удобной форме, для чего перенесем выходные сигналы в левую часть уравнения

$$\begin{aligned} &y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_n y(k-n) = \\ &= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \ldots + b_m u(k-m)\ . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Структура разностного уравнения (3.46) напоминает структуру дифференциального уравнения, только в нем вместо производных фигурируют задержки дискретных сигналов. Этим определяется и общность подходов к описанию аналоговых и дискретных систем.

Но, в отличие от дифференциального уравнения, разностное уравнение непосредственно описывает алгоритм вычисления реакции на известное воздействие, поэтому легко решаются. Итак: *разностное уравнение непосредственно описывает алгоритм вычисления реакции на известное воздействие*.

3.7 Описание дискретных систем

Дискретные системы, как и аналоговые, могут описываться различными способами. Благодаря сходству свойств z-преобразования и преобразований Лапласа и Фурье способы описания дискретных и аналоговых систем похожи друг на друга. Это разностное уравнение (3.46), которое мы рассмотрели, импульсная характеристика, передаточная функция в разных своих вариациях.

3.7.1 Дискретная импульсная характеристика системы.

Дискретной импульсной характеристикой $w(k)$ *называется изменение выходного сигнала дискретной системы при подаче на ее вход единичного импульса* $x_0(k)$ при нулевых начальных условиях. Как и для аналоговых систем, знание импульсной характеристики позволяет проанализировать прохождение через систему любого сигнала. Для вывода импульсной характеристики системы представим, так же, как и в непрерывной системе, входной сигнал в виде комбинации единичных импульсов с весом входного сигнала

$$u(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)u_0(k-m) \ . \tag{3.47}$$

Здесь использовано фильтрующее (селективное) свойство единичных импульсов. Каждый из единичных импульсов (3.47), согласно определению, даст на выходе системы ее взвешенную импульсную характеристику $u(m)w(k-m)$, сдвинутую на m тактов. Тогда выходной сигнал представляет собой сумму этих импульсных характеристик

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)w(k-m) \ . \tag{3.48}$$

Выражение (3.48) называется дискретной сверткой входного сигнала с импульсной характеристикой дискретной системы. Для физически реализуемой системы $w(k) = 0$ при $k \prec 0$, поэтому верхний предел суммирования в (3.48) можно заменить на k

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{k} u(m)w(k-m) \ . \tag{3.49}$$

Дискретную свертку, в отличие от непрерывной, можно вычислить вручную или алгоритмически так, как это мы делали для примеров систем (см. (3.43) – (3.44) и таблицы 3.1 – 3.2).

3.7.2 Передаточная функция.

Применим z-преобразование к уравнению дискретной свертки (3.48). Поскольку свертке дискретных сигналов соответствует произведение их z-преобразований, то можно записать

$$y(z) = u(z)W(z) \ . \tag{3.50}$$

Входящая в (3.50) функция $W(z)$ представляет собой z-преобразование импульсной характеристики системы и в то же время, решая (3.50), получаем, что она равна отношению $y(z)$ к $u(z)$

$$W(z)=\sum_{k=0}^{\infty}w(k)z^{-k}=\frac{y(z)}{u(z)} \ . \tag{3.51}$$

Функция $W(z)$ *называется дискретной передаточной функцией системы*. Таким образом, *дискретная передаточная функция есть отношение z-преобразования выходного сигнала к входному сигналу, при нулевых начальных условиях*. Найдем выражение для этой функции, если известно разностное уравнение (3.46)

$$\begin{aligned}&y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\ldots+a_ny(k-n)=\\&=b_0u(k)+b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\ldots+b_mu(k-m)\end{aligned} \ . \tag{3.46}$$

Рассматривая правую и левую части уравнения (3.46), как сигналы, применим к ним z-преобразование. Учитывая свойство задержки z-преобразования (то есть, если $y(k)$ соответствует $y(z)$, то $y(k-1)$ будет соответствовать $y(z)z^{-1}$), вынося $y(z)$ и $x(z)$ за скобки, получаем

$$y(z)(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_nz^{-n})=u(z)(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_mz^{-m}) \ . \tag{3.53}$$

Из (3.53) находим

$$W(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_nz^{-n}} \ . \tag{3.54}$$

Таким образом, передаточная функция может быть представлена отношением полиномов по отрицательным степеням z. В (3.54) отрицательные степени z означают запаздывание на целое число тактов, поэтому соотношение между m и n может быть любым, все равно система будет физически реализуема. Конечно, при этом коэффициенты (3.54) должны быть отличными от нуля. Точнее, если $b_0\neq 0$, то $a_0\neq 0$; если $b_1\neq 0$, то $a_1\neq 0$;… .

Систему с передаточной функцией (3.54) можно рассматривать, как дискретный фильтр. *Фильтр, в котором хотя бы один коэффициент а знаменателя отличен от нуля* ($a_i\neq 0$)*, называется нерекурсивным фильтром*. В нем переходные процессы протекают теоретически за бесконечно большое время (как у экспоненты). *Такой фильтр иначе называется фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр). Если все коэффициенты знаменателя фильтра равны нулю (* $a_i=0$ *), то он называется рекурсивным фильтром*. В нем переходные процессы протекают ровно за m тактов дискретного времени. *Такой фильтр иначе называется фильтр с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтр)*. Разработана теория дискретных фильтров.

Вернемся к передаточной функции (3.54). В этой функции легко можно перейти к положительным степеням z, если числитель и знаменатель (3.54) умножить на z^n, если $m\prec n$ (или на z^m, если $m\succ n$). Тогда получим

$$W(z)=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\ldots+b_mz^{n-m}}{z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_n} \ . \tag{3.55}$$

Итак: *дискретная передаточная функция может быть представлена в двух видах: один вид содержит положительные степени z, другой – отрицательные*. Используются обе формы передаточных функций (3.54), (3.55). Числитель (3.55) можно интерпретировать, как полином n-й степени, в котором коэффициенты $b_{m-1}...b_0$ равны нулю, то есть

$$W(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + ... + b_m z^{n-m} + 0z^{n-m-1} + ... + 0}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_n} \quad . \tag{3.55-1}$$

Выражение (3.55) может быть представлено в других формах. Рассмотрим форму, когда из дроби вынесено $b_0 z^{n-m}$ и обозначено $c_i = b_i / b_0$

$$W(z) = b_0 z^{n-m} \frac{z^m + c_1 z^{m-1} + c_2 z^{m-2} + ... + c_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_n} \, . \tag{3.55-2}$$

Множитель z^{n-m} в (3.55-2) соответствует сдвигу вперед на *n–m* тактов, так как число *n–m* положительное. Этот множитель можно убрать, тогда (3.55-2) принимает вид

$$W(z) = b_0 \frac{z^m + c_1 z^{m-1} + c_2 z^{m-2} + ... + c_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_n} \, . \tag{3.55-3}$$

Переходные процессы в (3.55-2) и (3.55-3) будут одинаковыми, но, убирая множитель z^{n-m}, мы тем самым вносим запаздывание в системе (3.55-3) по отношению к (3.55-2) на *n–m* тактов. Также как и для непрерывных систем, в системе вида (3.55-3) должно быть $m \le n$, иначе нарушается принцип причинности (следствие не должно опережать причину).

Если система задана в виде разностного уравнения (3.52), то дискретная передаточная функция находится очень просто – она сразу может быть записана в виде (3.54) или (3.55). Задача сильно усложняется, если нужно найти дискретную передаточную функцию по известной непрерывной передаточной функции. Усложнение связано с тем, что z и s связаны степенной зависимостью $z = e^{sT}$, откуда $s = (\ln z)/T$. Не удается использовать это трансцендентное выражение для получения дискретной передаточной функции из непрерывной. Для этого разработаны другие методы, их мы рассмотрим позже.

3.7.3 Частотная характеристика.

Частотную характеристику (комплексный коэффициент передачи) можно получить, если в передаточной функции вместо комплексной переменной s подставить $j\omega$. Для восстановления s в передаточной функции подставим в $W(z)$ вместо z ее значение по (3.40) $z = e^{sT}$ и в нем вместо s подставим $j\omega$

$$W(e^{j\omega T}) = W(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} w(k) e^{-j\omega kT} \quad . \tag{3.56}$$

Из (3.56) видно, что частотная характеристика дискретной системы, так же как спектр дискретного сигнала, является периодической функцией с периодом $\omega_д = 2\pi / T$.